18/01/2017

Να συγκριθούν οι αριθμοί

- $2017^{2016} < 2016^{2017}$

$\iff \log(\quad) < \log(\quad)$

$\iff 2016\log 2017 < 2017\log 2016$

$\iff \dfrac{\log 2017}{2017} < \dfrac{\log 2016}{2016}$

- $\underbrace{1000^{1000} < 999^{1001}}$ $\quad 1001^{999}$

$\Updownarrow$

$1000\log 1000 < 999\log 1001$

$\Updownarrow$

$\dfrac{\log 1000}{999} < \dfrac{\log 1001}{1000}$

Ομοία το άλλο.

Άσκηση

Έστω f,g $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμες ώστε

$f'(t)g(t) \neq f(t)g'(t)$ (1) για κάθε $t\in\mathbb{R}$.

α) Να δειχθεί ότι μεταξύ δυο ριζών της μιας εκ των f,g υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της άλλης.

β) Μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της g.

α) Έστω $\alpha < \beta$ δύο ρίζες της f (δηλ. $f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$).
Από τη σχέση (1) προκύπτει $g(\alpha)\neq 0$, $g(\beta)\neq 0$
Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο) ότι
$g(t)\neq 0 \quad \forall t\in(\alpha,\beta)$.

Ορίζουμε $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$

Η h είναι παραγωγίσιμη
με $h'(x) = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

$h(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\dfrac{0}{g(\alpha)}=0$, $h(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{g(\beta)}=\dfrac{0}{g(\beta)}=0$

h συν. στο $[\alpha,\beta]$
Από θεωρ. Rolle
$\exists\, \xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $h'(\xi)=0$ και άρα $f'(\xi)g(\xi)=f(\xi)g'(\xi)$
άτοπο από την (1).

Επομένως υπάρχει $t\in(\alpha,\beta)$ με $g(t)=0$

α) Έστω $\alpha<\beta$ δύο διαδοχικές ρίζες της f $\left(\begin{array}{l}\text{δηλ. } f(\alpha)=0=f(\beta)\\ \text{και } f(t)\neq 0 \ \forall t\in(\alpha,\beta)\end{array}\right)$
Σύμφωνα με τα προηγούμενα υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της g στο (α,β)

Υποθέτουμε (προς απαγωγή σε άτοπο)
ότι υπάρχουν δύο ρίζες της g στο (α,β)
Έστω $\gamma<\delta$
δηλ. $\alpha<\gamma<\delta<\beta$

Πάλι σύμφωνα με το α) μεταξύ των γ,δ υπάρχει μια ρίζα της f, άτοπο

Επομένως μεταξύ δυο διαδοχικών ριζών της f υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της g.

$\boxed{1}$ $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad |f(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Να δ.ο. η f είναι συνεχής στο 0.

α) Με τον ορισμό

β) Με την αρχή της μεταφοράς.

Απ.

$|f(0)| \leq |0| = 0 \quad \Rightarrow f(0) = 0$

α) Έστω $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $\delta = \varepsilon$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - 0| < \delta$

ισχύει $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| \leq |x| < \delta = \varepsilon$

β) Έστω $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τυχαία ακολουθία στο $\mathbb{R}$ με $x_n \to 0$

$|f(x_n)| \leq |x_n| \quad \forall n$

$-|x_n| \leq f(x_n) \leq |x_n|$

Εφόσον $x_n \to 0 \Rightarrow |x_n| \to 0$

από Θ. ισοσ. ακολ.

$f(x_n) \to 0$ δηλ. $f(x_n) \to f(0)$

Επομένως f είναι συνεχής στο 0.

$\boxed{2}$ $f\ [1,5] \to \mathbb{R}$ συνεχής $f(1) = f(5)$

Να δ.ο. $\exists\, x, y \in [1,5]$ με $y - x = 2$

και $f(x) = f(y)$

Απ. Ορίζουμε $g\ [1,3] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x+2) - f(x)$

<u>1η περίπτωση</u> $f(1)=f(3)$ Θέτουμε $x=1,\ y=3$

<u>2η περίπτωση</u> $f(1)\neq f(3)$

g συνεχής στο $[1,3]$

$g(1) = f(3)-f(1)$

$g(3) = f(5)-f(3) = f(1)-f(3)$

$g(1)\,g(3) = -\big(f(1)-f(3)\big) < 0$

Από Θεωρ. Bolzano ...

$\exists\, x\in(1,3)$ $g(x)=0$

δηλ. $f(x+2) = f(x)$

Για $y=x+2$

Έχουμε $3<y<5$

$1<x<3$

$f(x)=f(y)$

$\boxed{3}$ f,g $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχείς

$(f(x))^2 = (g(x))^2 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

Να δ.ο. είτε $f(x)=g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

ή $f(x)=-g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

<u>Αποδ.</u>

Από την υπόθεση προκύπτει $g(x)\neq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ και επίσης ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$. $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

Υποθέτουμε ότι $\exists\, a,b\in\mathbb{R}$

$f(a)=g(a)$ και $f(b)=-g(b)$.

Ορίζουμε $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ $h(x)=f(x)\,g(x)$

h συνεχής ως γινόμενο συνεχών.

$h(a)h(b) = f(a)g(a)\ f(b)g(b)$

$= (g(a))^2 \ (-(g(b))^2) = -g(a)^2 g(b)^2 < 0$

Απο το Θ. Bolzano $\exists\ \xi \in (a, b)$ $h(\xi)=0$
$\Rightarrow f(\xi)=0$ ή $g(\xi)=0$.

$\boxed{4}$ $f\ [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής
$x, y, z \in [a, b]$
Να δ.ο. $\exists\ \xi \in [a, b]$ ώστε $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z))$

Αποδ
Η f ως συνεχής σε κλειστό διάστημα λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή δηλ. $\exists\ \lambda, \mu \in [a, b]$ $f(\lambda) \leq f(t) \leq f(\mu)$ $\forall\ t \in [a, b]$

$$\left.\begin{array}{l} f(\lambda) \leq f(x) \leq f(\mu) \\ f(\lambda) \leq f(y) \leq f(\mu) \\ f(\lambda) \leq f(z) \leq f(\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow 3f(\lambda) \leq f(x)+f(y)+f(z) \leq 3f(\mu)$$

$$\Rightarrow f(\lambda) \leq \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z)) \leq f(\mu)$$

Απο το Θ. Ενδιάμεσων τιμων για τη συνεχή f υπαρχει κάποιο ξ στο διάστημα με άκρα μ, λ
$([\mu, \lambda]$ ή $[\lambda, \mu])$.

ώστε $f(\xi) = \frac{1}{3}(f(x)+f(y)+f(z))$.

$\boxed{5}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(a+b) = f(a) + f(b)$ (1) $\forall a, b \in \mathbb{R}$.
Να δ.ο. αν η f είναι συνεχής στο 0 τότε είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

Αποδ

Για $a = b = 0$ προκύπτει $f(0+0) = f(0) + f(0)$
$\Rightarrow f(0) = 2f(0)$
$\Rightarrow f(0) = 0$

Επίσης από την (1).
$0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$
$\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο 0.
Έστω τυχαίο $x_0 \in \mathbb{R}$. Θα δ.ο. η f είναι συνεχής στο x_0

Έστω $\varepsilon > 0$.
Εφόσον η f είναι συνεχής στο 0 υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $\forall x \in \mathbb{R}$
αν $|x - 0| < \delta$ τότε $|f(x) - \underbrace{f(0)}_{0}| < \varepsilon$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $|x - x_0| < \delta$ $\quad |(x - x_0) - 0| < \delta$
άρα από τα παραπάνω $|f(x - x_0) - \underbrace{f(0)}_{0}| < \varepsilon$.
$\Rightarrow |f(x + (-x_0))| < \varepsilon$
$\Rightarrow |f(x) + f(-x_0)| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ Επομένως η f είναι συνεχής στο x_0

$\boxed{8}$ f, g $[0,1] \to [0,1]$ συνεχείς
ώστε $f \circ g = g \circ f$ και f αύξουσα
Να δειχθεί ότι οι f, g έχουν κοινό σταθερό σημείο
(δηλ $\exists\, \xi \in [0,1]$ $f(\xi) = \xi = g(\xi)$).
Αποδ

Εύκολα αποδεικνύεται ότι η g έχει ένα σταθ. σημείο

έστω $x \in [0,1]$ ώστε $g(x_1) = x_1$

Ορίζουμε ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο $[0,1]$ ως εξής:

πρώτος όρος x_1

$x_{n+1} = f(x_n)$

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις α) $f(x_1) \geq x_1$

β) $f(x_1) \leq x_1$

περίπτωση α) Θ.Δ. χρησιμοποιώντας επαγωγή ότι $x_{n+1} \geq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

1ο Επαγωγικό βήμα $x_2 = f(x_1) \geq x_1$ από την υπόθεση α)

Γενικό επαγωγικό βήμα.

Υποθέτουμε ότι $x_{n+1} \geq x_n$ και $g(x_n) = x_n$.

$$x_{n+1} \geq x_n \xRightarrow{f \text{ αύξουσα}} f(x_{n+1}) \geq f(x_n)$$

$$\Rightarrow x_{n+2} \geq x_{n+1}$$

και

$$g(x_{n+1}) = g(f(x_n)) = (g\circ f)(x_n)$$

$$= (f\circ g)(x_n) = f(g(x_n)) = f(x_n)$$

$$= x_{n+1}$$

Επομένως (x_n) αύξουσα και φραγμένη άνω (από το 1)

Είναι συγκλίνουσα. Θέτουμε $\xi = \lim x_n$

$$x_n \to \xi \xRightarrow{f \text{ συνεχής}} f(x_n) \to f(\xi)$$

$$\Rightarrow x_{n+1} \to f(\xi)$$

$$x_n \to \xi \Rightarrow x_{n+1} \to \xi$$

Συνεπώς $f(\xi) = \xi$

Επίσης g συνεχής

$x_n \to \xi \Rightarrow g(x_n) \to g(\xi) \Rightarrow x_n \to g(\xi)$

Συνεπώς $g(\xi)=\xi$

Περίπτωση β (x_n) φθίνουσα και τα υπόλοιπα ομοίως.

III $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής

$-3 < f(x) < 0 \quad \forall x \in [0,1]$

Να δ.ο.

(α) $\exists\, \xi \in (0,1) \quad \sqrt{10\xi} = -f(\xi)$

(β) $\exists\, \lambda > 0$ ώστε $f(x) + \sqrt{10x} + 3 \geq \lambda \quad \forall x \in [0,1]$

Απόδ.

(α) $g: [0,1] \to \mathbb{R} \quad g(x) = f(x) + \sqrt{10x}$ g συνεχής

$g(0) = f(0) + \sqrt{10 \cdot 0} = f(0) < 0$

$g(1) = f(1) + \sqrt{10 \cdot 1} = f(1) + \sqrt{10} > -3 + \sqrt{10} > -3+3 = 0$

Από το Θ. Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$ ώστε $g(\xi) = 0$

$\Rightarrow \sqrt{10\xi} = -f(\xi)$

(β) Η συνάρτηση $h:[0,1] \to \mathbb{R}$

$h(x) = f(x) + \sqrt{10x} + 3$ είναι συνεχής

άρα παίρνει ελάχιστη τιμή.

Δηλ. $\exists\, x_0 \in [0,1]$

$h(x) \geq h(x_0) \quad \forall x \in [0,1]$

Θέτουμε $\lambda = h(x_0)$

$\lambda = h(x_0) = f(x_0) + \sqrt{10x_0} + 3 = \underbrace{\sqrt{10x_0}}_{\geq 0} + \underbrace{(f(x_0)+3)}_{>0} > 0$

$f\ (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$.

Ισχύει $\quad x \cdot \tan x\, f(x) - x^2 + x = x(e^{5x} - x) \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2)$

Απ. Να δ.ο. η f είναι συνεχής σε κάθε $x \neq 0$
Τι πρέπει να συμβαίνει για να είναι η f συνεχής στο 0;

$x\,(\tan x\, f(x) - x + 1) = x\,(e^{5x} - x)$

Για $x \neq 0$ προκύπτει $\quad \tan x\, f(x) = e^{5x} - x + x - 1$.

$$f(x) = \frac{e^{5x} - 1}{\tan x}$$

Η f είναι συνεχής στο $(-\pi/2, 0)$ και στο $(0, \pi/2)$ ως πηλίκο συνεχών

Η f είναι συνεχής στο 0.

$$\Leftrightarrow \quad f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{\tan x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{e^{5x} - 1}{5x} \cdot \frac{5x \cos x}{\sin x} = 5$$

f συνεχής στο $0 \Leftrightarrow f(0) = 5$

Άσκηση
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \sin x$
Να εξεταστεί αν η f είναι παραγωγίσιμη. (Απ. Ναι).
Να εξεταστεί αν η f' είναι παραγωγίσιμη.

Αποδ

$$f(x) = \begin{cases} x \sin x & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -x \sin x & x < 0 \end{cases}$$

f παραγ. στο $(0,+\infty)$
με $f'(x) = \sin x + x\cos x$

f παραγ. στο $(-\infty,0)$
με $f'(x) = -\sin x - x\cos x$

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sin x - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \sin x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x\sin x - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} -\sin x = 0$$

$f'(0)=0$

$$f'(x) = \begin{cases} \sin x + x\cos x & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -\sin x - x\cos x & x<0 \end{cases}$$

$$f''_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x + x\cos x - 0}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} + \cos x\right)$$

$= 2.$

$$f''_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f'(x)-f'(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-\sin x - x\cos x - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{\sin x}{x} - \cos x = -2$$

Άρα η f' δεν είναι παραγωγίσιμη

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

Για $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{2}{x}\right) + x^2\left(-\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)\left(-\frac{2}{x^2}\right)$$

$$= 2x\cos\left(\frac{2}{x}\right) + 2\sin\frac{2}{x}$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2\cos\frac{2}{x} - 0}{x-0} = \underset{\substack{\uparrow \\ 0}}{x}\,\underset{\substack{\uparrow \\ \text{φραγμένη}}}{\cos\left(\frac{2}{x}\right)} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

άρα $f'(0)=0$.

Θέτουμε $\quad x_n = \dfrac{2}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$

$$f'(x_n) = \underbrace{\frac{2}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}}_{\to 0}\underbrace{\cos\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}_{=0} + 2\sin\left(2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= 2 \to 2 \neq f'(0)$$

Επομένως η f' δεν είναι συνεχής στο 0.

$$\log(4n+3) - \log(2n+2)$$

$= \log\left(\dfrac{4n+3}{2n+2}\right)$ η μέσα είναι στο 2 η log είναι συνεχής

άρα $\to 2$.